

Sommaire

Introduction	7
1 Bases du calcul combinatoire	9
1.1 Applications, bijections	9
1.2 Dénombrements élémentaires	10
1.2.1 Permutations, factorielle	10
1.2.2 Arrangements, suites n -aires, A_n^p	11
Arrangements (sans répétition)	11
Nombre d'applications injectives	12
Arrangements avec répétitions, suites n -aires	13
1.2.3 Combinaisons, nombres de combinaisons, coefficients binomiaux	13
Propriétés des coefficients binomiaux	14
Table des nombres de combinaisons (triangle de Pascal)	18
Complexité du calcul des nombres de combinaisons	19
1.2.4 Application des combinaisons au binôme de Newton	19
1.2.5 Suites n -aires de type particulier	20
Interprétations	21
1.3 Encadrements et approximations	22
1.3.1 Encadrements et approximations de la factorielle	23
Table des factorielles	25
1.3.2 Encadrements et approximations des nombres d'arrangements	26
1.3.3 Encadrements et approximations des nombres de combinaisons	26
1.4 Une application à la théorie des nombres : la loi de raréfaction des nombres premiers	28
1.5 Exercices	32
2 Séries génératrices	45
2.1 Séries formelles	45
2.1.1 Définitions et opérations	45
2.1.2 Utilisation des séries formelles	47
2.2 Séries génératrices ordinaires	48
2.2.1 Exemples de séries génératrices ordinaires	48
Utilisation de séries entières connues	48
Exemples utilisant un produit	50
Exemple utilisant une dérivation	50
Exemples utilisant une intégration	50
2.2.2 Les nombres de Fibonacci \mathcal{F}_n	51
2.2.3 Combinaisons avec répétitions, Γ_n^p	52
Relation de récurrence et table des valeurs des Γ_n^p	55
Complexité et équivalents asymptotiques	55

Combinaisons avec répétitions de type particulier	56
2.2.4 Applications des séries génératrices aux probabilités	56
2.3 Séries génératrices exponentielles	57
2.3.1 Utilisation de séries entières connues	58
2.3.2 Un calcul de fonction génératrice exponentielle	58
2.3.3 Produit de deux séries génératrices exponentielles	59
2.3.4 Formule (ou théorème) d'inversion de Pascal	60
2.3.5 Suites n -aires de type particulier	61
2.4 Exercices	62
3 Principe d'inclusion-exclusion	85
3.1 Formule du crible	85
3.1.1 Première formulation	85
3.1.2 Seconde formulation	87
3.2 Applications de la formule du crible	89
3.2.1 Nombre de surjections	89
Table des nombres de surjections	90
3.2.2 Dérangements	90
Calcul du nombre de dérangements d_n	90
Relation de récurrence et valeurs des nombres de dérange- ments	91
Fonction génératrice exponentielle des d_n	93
3.2.3 Fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$	93
3.3 Exercices	94
4 Partitions d'entiers	109
4.1 Nombre p_n de partitions de l'entier n	109
4.1.1 Fonction génératrice ordinaire des nombres p_n	110
4.1.2 Majorant et équivalent asymptotique de p_n	111
4.2 Partitions en sommants impairs ou distincts	113
4.3 Diagrammes de Ferrers	115
4.4 Nombres $p_{n,=m}$ et $p_{n,\leq m}$ de partitions de n en exactement ou en au plus m sommants	116
4.5 Partitions en sommants distincts et nombres pentagonaux	118
4.6 Relation de récurrence pour les nombres p_n	122
4.7 Propriétés des nombres $p_{n,\leq m}$ et $p_{n,=m}$	123
4.7.1 Relations de récurrence pour les entiers $p_{n,\leq m}$ et $p_{n,=m}$	123
4.7.2 Équivalents asymptotiques de $p_{n,=m}$ et $p_{n,\leq m}$ à m fixé	125
4.7.3 Fonctions génératrices des $p_{n,\leq m}$ et des $p_{n,=m}$ à m fixé	126
4.8 Exercices	127
5 Partitions d'ensembles	139
5.1 Nombres de Bell B_n	139
5.1.1 Définition et propriétés	139
Relation de récurrence entre les nombres de Bell (formule d'Aitken)	140
Fonction génératrice exponentielle des nombres de Bell	140
Expression des nombres de Bell (formule de Dobiński)	141

	Encadrement des nombres de Bell	142
5.1.2	Nombres V_n de partitions sans singleton	143
	Fonction génératrice exponentielle des nombres V_n	143
	Relations entre les nombres V_n et les nombres de Bell B_n	144
	Table des nombres V_n	145
	Encadrement des nombres V_n	145
5.1.3	Nombres W_n de partitions cycliquement espacées	145
	Relation entre les nombres W_n et les nombres de Bell B_n	146
	Égalité entre les nombres W_n et les nombres V_n	147
5.2	Nombres de Stirling de seconde espèce $S_{n,k}$	147
5.2.1	Valeurs particulières et premières propriétés	147
5.2.2	Fonction génératrice exponentielle des $S_{n,k}$ à k fixé	149
5.2.3	Première expression des nombres $S_{n,k}$	150
5.2.4	Deuxième expression des nombres $S_{n,k}$	151
5.2.5	Fonction génératrice ordinaire des nombres $S_{n,k}$ à k fixé	151
5.2.6	Troisième expression des nombres $S_{n,k}$	152
5.2.7	Encadrement et équivalent asymptotique	153
5.2.8	Décomposition de x^n à l'aide des nombres $S_{n,k}$	155
5.3	Nombres de Stirling de première espèce $s_{n,k}$	156
5.3.1	Définition	156
5.3.2	Propriétés et valeurs particulières	156
5.3.3	Relation de récurrence sur les $s_{n,k}$	157
5.3.4	Fonction génératrice exponentielle des nombres $s_{n,k}$ à k fixé	158
5.3.5	Expression des nombres $s_{n,k}$	159
5.3.6	Relations entre les nombres de Stirling de première et se- conde espèces	160
5.3.7	Applications en théorie des nombres	160
5.4	Exercices	162
6	Permutations	175
6.1	Généralités	175
6.2	Décompositions d'une permutation	177
6.2.1	Décomposition d'une permutation en cycles	177
6.2.2	Décomposition d'un cycle en transpositions	178
6.2.3	Parité et signature d'une permutation	179
6.3	Nombres de montées, nombres eulériens $A_{n,k}$	181
6.3.1	Définition des nombres eulériens	181
6.3.2	Propriétés des nombres eulériens	182
6.3.3	Expression et équivalent asymptotique	184
6.4	Inversions dans une permutation	189
6.5	Permutations présentant un nombre donné d'inversions	191
6.5.1	Définitions et premières propriétés	191
6.5.2	Relation de récurrence sur les nombres $b_{n,k}$	191
6.5.3	Fonction génératrice ordinaire des $b_{n,k}$ à n fixé	192
6.6	Dénombrements liés à la décomposition en cycles	193
6.6.1	Permutations de type donné	193
6.6.2	Polynôme indicateur des cycles	194

6.6.3	Applications à des dénombrements de permutations	195
	Dérangements	195
	Permutations ayant exactement k cycles	196
6.7	Théorème de Pólya	197
6.7.1	Notations et lemmes préliminaires	197
6.7.2	Lemme de Burnside	198
6.7.3	Un exemple	199
6.7.4	Définitions et notations pour le théorème de Pólya	200
6.7.5	Énoncé et preuve du théorème de Pólya	201
6.7.6	Retour à l'exemple	203
6.8	Exercices	204
7	Suites remarquables d'entiers	229
7.1	Nombres de Catalan C_n	229
7.1.1	Définition	229
7.1.2	Propriétés des nombres de Catalan	229
	Fonction génératrice ordinaire	229
	Expressions des nombres de Catalan	230
	Encadrement et équivalent asymptotique	231
	Relation de récurrence et table des nombres de Catalan	231
7.1.3	Problèmes liés aux nombres de Catalan	232
	Arbres binaires complets	232
	Arbres binaires	233
	Arbres ordonnés	234
	Parenthésages	235
	Mots de Dyck	237
	Chemins de Dyck	238
	Triangulation d'un polygone convexe	240
	Cordes disjointes entre des points d'un cercle	244
	Partitions non croisées	245
7.1.4	Nombres de Narayana $N_{n,k}$	246
7.2	Nombres de Motzkin M_n	251
7.2.1	Fonction génératrice des nombres de Motzkin	251
7.2.2	Expressions pour les nombres de Motzkin	252
7.2.3	Problèmes liés aux nombres de Motzkin	255
	Cordes disjointes entre des points d'un cercle	256
	Partitions non croisées espacées	257
	Mots de Motzkin	260
	Arbres unaires-binaires	260
	Buissons	262
7.2.4	Nombres de Riordan R_n	264
	Partitions non croisées sans singleton	265
	Buissons longs et buissons courts	266
7.3	Exercices	267

8 Applications aux graphes et aux ensembles ordonnés	277
8.1 Couplages dans certains graphes	277
8.1.1 Couplages dans les chaînes	277
8.1.2 Couplages dans les cycles	278
8.2 Arbres couvrants	280
8.2.1 Graphes complets, formule de Cayley	280
8.2.2 Arbres à nombre de feuilles fixé	283
8.2.3 Arbres couvrants de certains graphes	284
Échelles	285
Éventails	287
Roues	289
8.2.4 Théorème de Kirchhoff	291
Application aux graphes complets	296
Application aux graphes complets privés d'une arête	297
Application aux graphes bipartis complets	297
8.3 Coloration de graphe, polynôme chromatique	299
8.4 Relations binaires et structures ordonnées	301
8.4.1 Ordres totaux	303
8.4.2 Préordres totaux, nombres de Fubini Φ_n	303
8.4.3 Préordres et topologies, Π_n et T_n	308
8.4.4 Ordres partiels et T^0 -topologies, Ω_n et T_n^0	312
8.4.5 Relations transitives, Θ_n	315
8.5 Exercices	316
 Annexes	 331
A Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples	331
B Relations binaires et graphes	333
B.1 Relations binaires	333
B.2 Graphes non orientés	333
B.3 Graphes orientés	336
C Arbres ordonnés ou binaires	337
D Séries entières, développement en séries entières	339
Notations	341
Bibliographie	343
Index	345