Introduction

L'analyse combinatoire est la branche des mathématiques discrètes consistant à dénombrer des structures définies sur des ensembles finis par des propriétés combinatoires. Au sein de la combinatoire, consacrée à l'étude plus générale de telles structures, son objectif est de répondre à des questions du type « Combien y a-t-il de façons de... ? ». Elle prolonge ainsi la combinatoire existentielle tout en s'en démarquant, le but n'étant pas de produire des conditions nécessaires ou suffisantes d'existence, mais de compter les structures désirées. Elle est liée aussi à la combinatoire extrémale et à l'optimisation combinatoire qui cherchent à déterminer des valeurs ou des structures optimales sous forme de théorèmes ou à l'aide d'algorithmes. Parfois appelée « combinatoire énumérative », elle ne consiste cependant pas à énumérer explicitement les structures cherchées mais à les compter. Bref, l'analyse combinatoire est l'art du dénombrement.

On en trouve les prémices dès l'Antiquité en Extrême-Orient, notamment en Inde [1]. Au fil des siècles, diverses contributions, chinoises, arabes, byzantines, plus tard européennes, s'y ajoutèrent, issues de motivations variées : considérations religieuses ou mystiques, applications pratiques, poésie, défis, énigmes, jeux... Les travaux de Blaise Pascal [2] et de Pierre de Fermat sur les jeux de hasard, au XVII[e] siècle, marquent l'essor mathématique de la discipline. D'autres mathématiciens s'inscriront dans leur continuité, tels Jacques (ou Jakob) Bernoulli [3], Abraham de Moivre ou Leonhard Euler au XVIII[e] siècle. Au cours des siècles suivants, l'analyse combinatoire va s'étendre à des domaines aussi divers que la chimie, l'électricité, l'informatique, la recherche opérationnelle, etc.

Alors que de nombreux livres anglo-saxons abordent volontiers l'art du dénombrement, souvent dans le cadre plus large de la combinatoire, il existe peu de références francophones consacrées entièrement à cette discipline, à part la monographie de Louis Comtet (1970). Le présent ouvrage a pour ambition de contribuer au renouvellement de la littérature sur ce sujet en en proposant un vaste panorama. Nous avons souhaité privilégier une présentation pédagogique et rigoureuse, sans sacrifier, nous l'espérons, le caractère esthétique et parfois ludique que nous trouvons nous-mêmes dans cette discipline. Quand plusieurs types de preuves sont envisageables, nous privilégions les preuves combinatoires, quitte à proposer une preuve alternative en exercice.

Les trois premiers chapitres présentent les bases du dénombrement : calcul combinatoire (bijections, factorielle, arrangements, combinaisons...), séries géné-

---

1. N. L. Biggs, « The roots of combinatorics », *Historia Mathematica* 6 (1979), 109-136, rapporte ainsi un passage du livre de médecine *Suśruta-Saṁhitā* du chirurgien hindou Suśruta (ou Sushruta), qu'il date du VI[e] siècle avant notre ère, dans lequel sont consignées toutes les variantes de goût que l'on obtient à partir des combinaisons de six saveurs : sucré, salé, acide, piquant, amer et astringent. Plusieurs livres cités dans la bibliographie comportent des précisions historiques : voir notamment N. L. Biggs, E. K. Lloyd et R. J. Wilson, « The history of combinatorics », *in* R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, ou R. Wilson et J. Watkins.

2. Son *Traité du triangle arithmétique* de 1665 est considéré par certains auteurs comme l'acte de naissance de la combinatoire.

3. Son livre *Ars conjectandi*, écrit entre 1685 et 1689 mais publié seulement en 1713 par son neveu Nicolas Bernoulli à titre posthume, en consolide les acquis tout en les enrichissant.

ratrices (ordinaires ou exponentielles), principe d'inclusion-exclusion (formule du crible). Ces outils permettent de résoudre directement divers problèmes : nombres de surjections, de solutions d'équations à variables entières, de dérangements (permutations sans point fixe), etc. Sont définies et étudiées à cette occasion des suites de nombres classiques comme ceux de Fibonacci ou de Bernoulli. Les cinq chapitres suivants mettent l'accent sur des sujets centraux de la combinatoire : partitions d'entiers, partitions d'ensembles, permutations, théorie des graphes, ensembles partiellement ordonnés, etc. S'appuyant sur les outils décrits dans les chapitres précédents et les illustrant, ils permettent d'établir des résultats spécifiques aux thèmes traités (théorèmes de Cayley, de Kirchhoff, théorie de Pólya, etc.) et de définir d'autres suites de nombres remarquables (nombres de Bell, de Stirling, de Catalan, de Motzkin, de Riordan, etc.).

Chaque chapitre contient des exercices et leurs solutions détaillées. Ceux-ci permettent de vérifier la bonne compréhension du cours ou en proposent des extensions. Certaines parties traitent de problèmes « historiques » qui ont marqué le développement de l'analyse combinatoire : parenthésages d'une expression arithmétique, problème « des ménages » consistant à répartir des couples autour d'une table de sorte que deux conjoints ne soient pas voisins, triangulation d'un polygone convexe, arbres couvrant un graphe, etc. Des applications à d'autres domaines des mathématiques ou parfois à l'informatique sont aussi proposées : théorie des nombres, probabilités, analyse, structures de données...

L'ensemble est complété par des annexes rappelant certains concepts ou résultats fondamentaux, un index détaillé et une bibliographie. En plus de celle-ci, signalons l'encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers OEIS (https://oeis.org/). Ce site répertorie de très nombreuses suites d'entiers et permet d'identifier des suites à partir des premières valeurs de celles-ci.

Cet ouvrage s'adresse, d'une part, aux étudiants d'universités et aux élèves d'écoles d'ingénieurs, d'autre part, aux doctorants, aux enseignants, aux chercheurs et aux ingénieurs, et plus généralement à toute personne désireuse d'approfondir ce sujet. Il suppose une certaine aisance avec les mathématiques générales de niveau licence, mais ne nécessite pas de prérequis en combinatoire.

Le contenu de cet ouvrage résulte de différents cours dispensés dans des formations universitaires ou dans des écoles d'ingénieurs, dont Télécom Paris. Nous remercions les étudiants auxquels nous nous sommes adressés et plus généralement tous nos interlocuteurs : leurs questions ou leurs remarques constructives nous ont permis, au cours des années, d'améliorer différentes formulations et de préciser plusieurs résultats. Nous sommes reconnaissants à Télécom Paris, et plus particulièrement à son directeur Nicolas Glady ainsi qu'à Gérard Memmi, responsable du département Informatique et réseaux, de nous avoir donné les moyens temporels et matériels d'écrire ce livre. Merci aussi à Alix Thimiakis, des éditions John Libbey Eurotext, pour sa relecture attentive et efficace. Enfin, nous remercions chaleureusement Nicolas Puech, directeur de la collection Iris, pour nous avoir accompagnés du début à la fin de cet ouvrage, sans oublier ses relectures qui ont contribué à améliorer le texte en de nombreux passages.

Irène Charon, Olivier Hudry, mars 2024